Классификация и геометрия дискретных интегрируемых уравнений типа Хироты

В.Э. Адлер (ИТФ им. Л.Д. Ландау)

Геометрия и интегрируемые системы

к 60-летию И.М. Кричевера

МИАН, 27–30 декабря 2010

Интегрируемые уравнения типа Хироты

$$x_{12}x_3 - x_{13}x_2 + x_{23}x_1 = 0 \qquad (\boldsymbol{\chi}_1)$$

$$\frac{(x_{12}-x_{13})(x_{23}-x_3)(x_2-x_1)}{(x_{13}-x_{23})(x_3-x_2)(x_1-x_{12})} = -1 \qquad (\boldsymbol{\chi}_2)$$

$$(x_{13}-x_{12})x_1 + (x_{12}-x_{23})x_2 + (x_{23}-x_{13})x_3 = 0 \qquad (\boldsymbol{\chi}_3)$$

$$\frac{x_{13}-x_{12}}{x_1} + \frac{x_{12}-x_{23}}{x_2} + \frac{x_{23}-x_{13}}{x_3} = 0 \qquad (\boldsymbol{\chi}_4)$$

$$\frac{x_{13}-x_{23}}{x_3} = x_{12}\Big(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\Big) \qquad (\boldsymbol{\chi}_5)$$

$$(x_{12}-1)(x_3-1) = x_2x_{13}(1-x_1^{-1})(1-x_{23}^{-1}) \qquad (\boldsymbol{\chi}_6)$$

$$x = x(n_1,n_2,n_3), \quad x_i = x(\vec{n}+e_i)$$

- Все уравнения хорошо известны и связаны друг с другом несложными подстановками. Непрерывный предел $\to$ 2D TL, KP.

- Некоторые ссылки:

  1981 Hirota
  1982 Miwa
  1985 Capel, Wiersma, Nijhoff
  1997 Krichever, Lipan, Wiegmann, Zabrodin
  1997 Doliwa
  1998 Bogdanov, Konopelchenko
  2002 Konopelchenko, Schief
  2003 Fomin, Zelevinsky
  2010 Adler, Bobenko, Suris. Classification of integrable discrete equations of octahedron type. arXiv:1011.3527

- В отличие от 2D случая, существенных параметров нет. Все коэффициенты уничтожаются неавтономными заменами, типа растяжений в уравнении Хироты (χ_1)

$$x(m,n,k) \to a^{mn} b^{nk} c^{mk} x(m,n,k).$$

- Кроме (χ_6), все уравнения **многомерно совместны**, сами с собой или с другими уравнениями из списка, то есть допускают вложение в многомерную решётку. **Цель доклада:** показать, что других совместных уравнений нет.

- Полиномиальность уравнений не предполагается.

- Предполагается, что уравнения аналитичны в некоторой области и применима теорема о неявной функции, по каждой переменной (в частности, тропические уравнения типа $\max\{x_{12}+x_3, x_{23}+x_1\} = x_{13}+x_2$ запрещены).

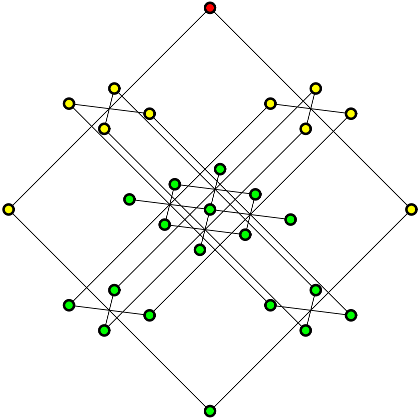
- Предполагается неприводимость: уравнения не должны иметь вид $ab=0$, где a и b зависят от неполного набора переменных.

- Уравнение (χ_1) часто записывают как

$$x_{-1}x_1 + x_{-2}x_2 + x_{-3}x_3 = 0,$$

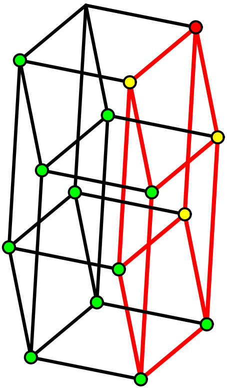
после линейного преобразования решётки. Однако, в такой форме свойство совместности теряется.

Логически возможная, но фактически не реализуемая совместность:



- Уравнение (χ_1) — предельный случай уравнения Хироты–Мивы (dBKP, dVN). Оно 4D-совместно на гиперкубе: для уравнений

$$
\begin{aligned}
&x_1x_{23} - x_2x_{13} + x_3x_{12} - xx_{123} = 0,\\
&x_1x_{24} - x_2x_{14} + x_4x_{12} - xx_{124} = 0,\\
&x_1x_{34} - x_3x_{14} + x_4x_{13} - xx_{134} = 0,\\
&x_2x_{34} - x_3x_{24} + x_4x_{23} - xx_{234} = 0
\end{aligned}
$$



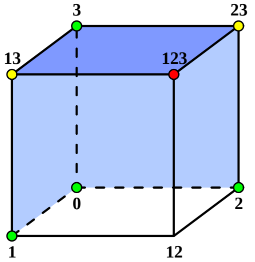
значение x_{1234} как функция от начальных данных x, x_i, x_{ij} не зависит от порядка вычислений.

Отметим, что при этом выполняется дополнительное уравнение на подрешётке:

$$x_{14}x_{23} - x_{13}x_{24} + x_{12}x_{34} - xx_{1234} = 0.$$

Для уравнений типа Хироты это определение непосредственно не применимо.

Определение совместности уравнений



Тройка уравнений

$$\begin{aligned} x_{12} &= f(x_1, x_2, x_4, x_{14}, x_{24}),\\ x_{13} &= g(x_1, x_3, x_4, x_{14}, x_{34}),\\ x_{23} &= h(x_2, x_3, x_4, x_{24}, x_{34}) \end{aligned} \tag{1}$$

4D-совместна, если равенства

$$\begin{aligned} x_{123} &= f(g, h, x_{34}, T_4(g), T_4(h))\\ &= g(f, h, x_{24}, T_4(f), T_4(h))\\ &= h(f, g, x_{14}, T_4(f), T_4(g)) \end{aligned} \tag{2}$$

выполняются тождественно по начальным данным

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\quad x_{14},\ x_{24},\ x_{34},\ x_{44},\quad x_{144},\ x_{244},\ x_{344}.$$

Роль 4-й координаты выделена, но симметрия сейчас будет восстановлена.

Теорема 1. Если тройка (1) совместна, то автоматически выполнены уравнения вида

$$k(x_1, x_2, x_3, x_{12}, x_{13}, x_{23}) = 0, \tag{3}$$

$$l(x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}) = 0. \tag{4}$$

◀ Дифференцированием условия совместности (2) можно получить

$$f_{x_1} g_{x_3} h_{x_2} + f_{x_2} g_{x_1} h_{x_3} = 0, \qquad f_{x_2} g_{x_3} h_{x_4} = f_{x_4} g_{x_3} h_{x_2} + f_{x_2} g_{x_4} h_{x_3},$$

$$f_{x_{14}} g_{x_{34}} h_{x_{24}} + f_{x_{24}} g_{x_{14}} h_{x_{34}} = 0, \quad f_{x_{24}} g_{x_{34}} h_{x_4} = f_{x_4} g_{x_{34}} h_{x_{24}} + f_{x_{24}} g_{x_4} h_{x_{34}}.$$

Это равносильно вырождению матриц Якоби:

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & 0 & f_{x_4} \\ g_{x_1} & 0 & g_{x_3} & g_{x_4} \\ 0 & h_{x_2} & h_{x_3} & h_{x_4} \end{pmatrix} \le 2,$$

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} f_{x_{14}} & f_{x_{24}} & 0 & f_{x_4} \\ g_{x_{14}} & 0 & g_{x_{34}} & g_{x_4} \\ 0 & h_{x_{24}} & h_{x_{34}} & h_{x_4} \end{pmatrix} \le 2.$$

Первое условие означает, что если решить уравнения $x_{12} = f$, $x_{13} = g$ относительно x_1, x_2, то x_3, x_4 автоматически сократятся при подстановке в уравнение $x_{23} = h$, и получится уравнение вида (4). Аналогично, из второго условия следует (3). ▶

Итак, 4-е направление фактически равноправно с остальными. Кроме того, ещё одно уравнение живёт на подрешётке. Картина становится полностью симметричной при переобозначении $x_i \to x_{i,5}$, что отвечает вложению в корневую решётку

$$Q(A_N) = \{(n_0, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}^{N+1} : n_0 + n_1 + \dots + n_N = 0\}.$$

Совместность пятёрки уравнений. Уравнения

$$f^{(m)}(x_{ij}, x_{ik}, x_{il}, x_{jk}, x_{jl}, x_{kl}) = 0, \quad \{i, j, k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

называются совместными, если:

1) из любых трёх следуют остальные два;
2) это же верно для набора сдвинутых уравнений

$$f^{(m)}(x_{ijm}, x_{ikm}, x_{ilm}, x_{jkm}, x_{jlm}, x_{klm}) = 0, \quad m = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Трёхногая форма уравнений

Более тщательный анализ условия совместности объясняет, как возникают дополнительные уравнения.

Теорема 2. Если система (1) совместна, то она приводится к виду

$$
\begin{aligned}
a(x_1,x_4,x_{14})-b(x_2,x_4,x_{24})&=p(x_{12},x_{14},x_{24}),\\
c(x_3,x_4,x_{34})-a(x_1,x_4,x_{14})&=q(x_{13},x_{14},x_{34}),\\
b(x_2,x_4,x_{24})-c(x_3,x_4,x_{34})&=r(x_{23},x_{24},x_{34}),
\end{aligned}
$$

а также к виду

$$
\begin{aligned}
A(x_1,x_4,x_{14})-B(x_2,x_4,x_{24})&=P(x_1,x_2,x_{12}),\\
C(x_3,x_4,x_{34})-A(x_1,x_4,x_{14})&=Q(x_1,x_3,x_{13}),\\
B(x_2,x_4,x_{24})-C(x_3,x_4,x_{34})&=R(x_2,x_3,x_{23}).
\end{aligned}
$$

Складывая, получаем уравнения вида (3) и (4).

Используя равноправие всех направлений на решётке, приходим к следующему критерию: пятёрка уравнений совместна, если для любой перестановки $\{i,j,k,l,m\}=\{1,2,3,4,5\}$ её уравнения приводятся к согласованным трёхногим формам

$$\begin{array}{lcccccc} & & & & & \langle l\rangle & \\ \langle i\rangle & [jm,jl,lm] & - & [km,kl,lm] & = & [jm,jk,km], & \\ \langle j\rangle & [km,kl,lm] & - & [im,il,lm] & = & [km,ki,im], & \\ \langle k\rangle & [im,il,lm] & - & [jm,jl,lm] & = & [im,ij,jm], & \end{array} \tag{5}$$

а сдвинутые уравнения к трёхногим формам

$$\begin{array}{lcccccc} & & & & & T_l\langle l\rangle & \\ T_i\langle i\rangle & [ikl,ikm,ijk] & - & [ijl,ijm,ijk] & = & [ikl,ilm,ijl], & \\ T_j\langle j\rangle & [ijl,ijm,ijk] & - & [jkl,jkm,ijk] & = & [ijl,jlm,jkl], & \\ T_k\langle k\rangle & [jkl,jkm,ijk] & - & [ikl,ikm,ijk] & = & [jkl,klm,ikl]. & \end{array} \tag{6}$$

Пример: решётка Менелая

Отображение $\psi : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}P^2$ называется решёткой Менелая, если ψ, ψ_i, ψ_j коллинеарны. Линейная задача (в аффинных координатах):

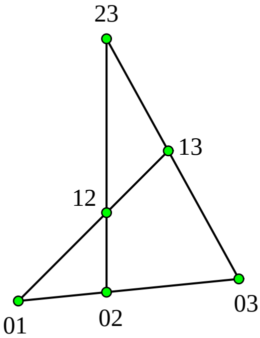
$$\psi_i = \psi + a^{(i)}(\psi_1 - \psi).$$

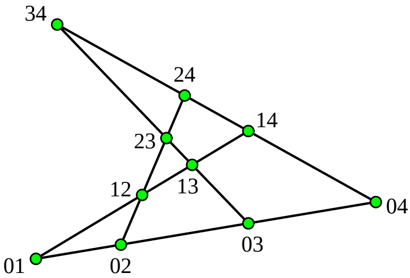
Условие совместности можно записать как (χ_2)

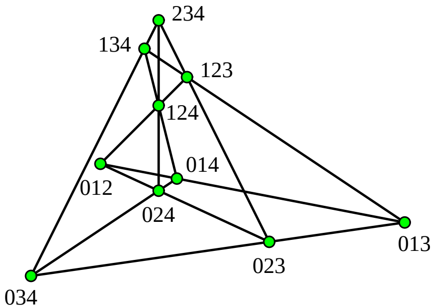
$$\frac{(x_{12} - x_{13})(x_{23} - x_3)(x_2 - x_1)}{(x_{13} - x_{23})(x_3 - x_2)(x_1 - x_{12})} = -1$$

где x произвольная линейная форма от ψ.

На рисунке — образ элементарного октаэдра.





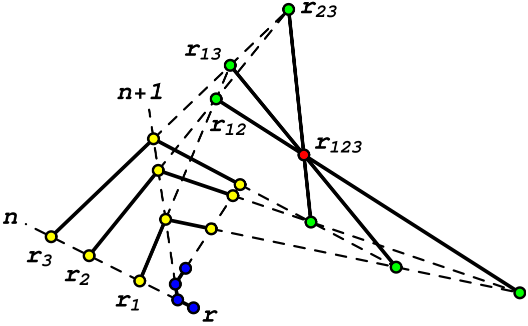


Образы согласованных пятёрок октаэдров:

(5) $\to 10_2 5_4$

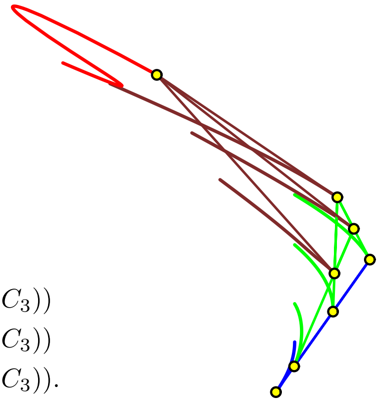
(6) $\to 10_3 10_3$ (конфигурация Дезарга)

Обе картинки объединяются при рассмотрении отображения на дискретных кривых



Непрерывный предел

Пусть даны кривые C и C_i, $i = 1, 2, \dots$ Пусть касательная к C в точке r пересекает C_i в точке r_i. Определим r_{ij} как пересечение касательных в r_i, r_j к соответствующим кривым. При движении r по C, точка r_{ij} вычертит новую кривую $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$. Аналитически, отображение сводится к $D\Delta\Delta$ уравнению типа Хироты



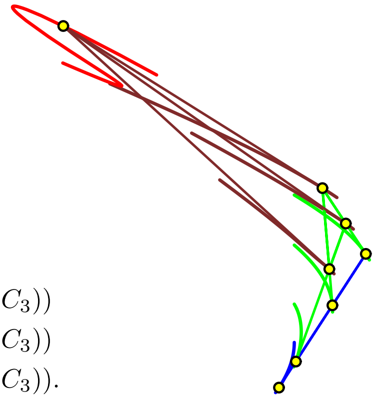
$$x_{ij} = \frac{x_i x_j}{x} + \frac{x_i' x_j - x_i x_j'}{x_j - x_i}.$$

Отображение F 3D-совместно:

$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned}$$

Непрерывный предел

Пусть даны кривые C и C_i, $i = 1, 2, \dots$ Пусть касательная к C в точке r пересекает C_i в точке r_i. Определим r_{ij} как пересечение касательных в r_i, r_j к соответствующим кривым. При движении r по C, точка r_{ij} вычертит новую кривую $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$. Аналитически, отображение сводится к $D\Delta\Delta$ уравнению типа Хироты



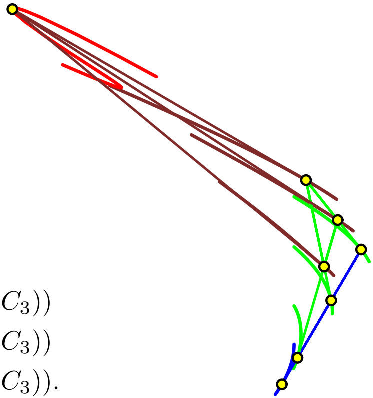
$$x_{ij} = \frac{x_i x_j}{x} + \frac{x_i' x_j - x_i x_j'}{x_j - x_i}.$$

Отображение F 3D-совместно:

$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned}$$

Непрерывный предел

Пусть даны кривые C и C_i, $i = 1, 2, \ldots$ Пусть касательная к C в точке r пересекает C_i в точке r_i. Определим r_{ij} как пересечение касательных в r_i, r_j к соответствующим кривым. При движении r по C, точка r_{ij} вычертит новую кривую $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$. Аналитически, отображение сводится к $D\Delta\Delta$ уравнению типа Хироты



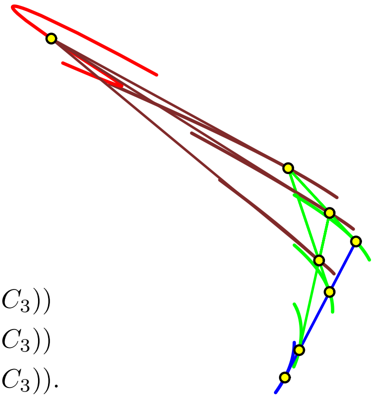
$$x_{ij} = \frac{x_i x_j}{x} + \frac{x_i' x_j - x_i x_j'}{x_j - x_i}.$$

Отображение F 3D-совместно:

$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned}$$

Непрерывный предел

Пусть даны кривые C и C_i, $i = 1, 2, \ldots$ Пусть касательная к C в точке r пересекает C_i в точке r_i. Определим r_{ij} как пересечение касательных в r_i, r_j к соответствующим кривым. При движении r по C, точка r_{ij} вычертит новую кривую $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$. Аналитически, отображение сводится к $D\Delta\Delta$ уравнению типа Хироты



$$x_{ij} = \frac{x_i x_j}{x} + \frac{x_i' x_j - x_i x_j'}{x_j - x_i}.$$

Отображение F 3D-совместно:

$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned}$$

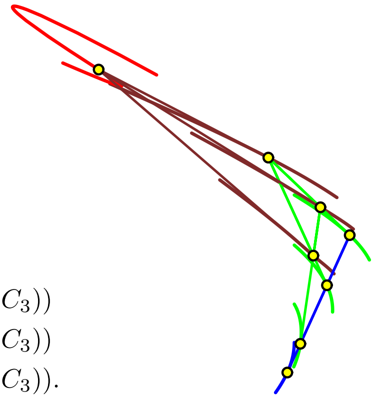
Непрерывный предел

Пусть даны кривые C и C_i, $i = 1, 2, \dots$ Пусть касательная к C в точке r пересекает C_i в точке r_i. Определим r_{ij} как пересечение касательных в r_i, r_j к соответствующим кривым. При движении r по C, точка r_{ij} вычертит новую кривую $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$. Аналитически, отображение сводится к $D\Delta\Delta$ уравнению типа Хироты

$$x_{ij} = \frac{x_i x_j}{x} + \frac{x'_i x_j - x_i x'_j}{x_j - x_i}.$$

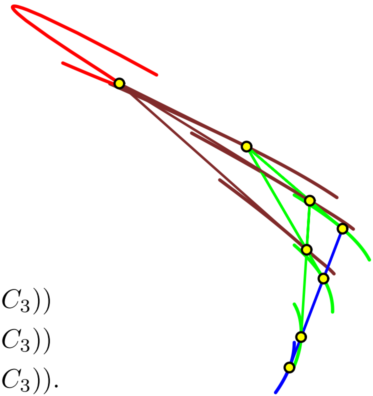
Отображение F 3D-совместно:

$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned}$$



Непрерывный предел

Пусть даны кривые C и C_i, $i = 1, 2, \dots$ Пусть касательная к C в точке r пересекает C_i в точке r_i. Определим r_{ij} как пересечение касательных в r_i, r_j к соответствующим кривым. При движении r по C, точка r_{ij} вычертит новую кривую $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$. Аналитически, отображение сводится к $D\Delta\Delta$ уравнению типа Хироты



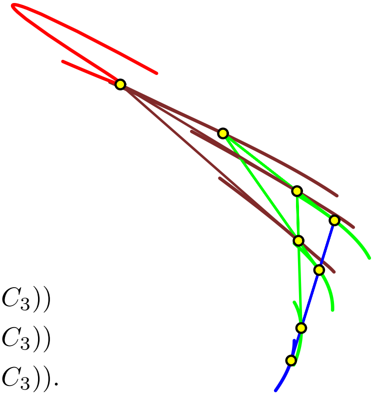
$$x_{ij} = \frac{x_i x_j}{x} + \frac{x_i' x_j - x_i x_j'}{x_j - x_i}.$$

Отображение F 3D-совместно:

$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned}$$

Непрерывный предел

Пусть даны кривые C и C_i, $i = 1, 2, \ldots$ Пусть касательная к C в точке r пересекает C_i в точке r_i. Определим r_{ij} как пересечение касательных в r_i, r_j к соответствующим кривым. При движении r по C, точка r_{ij} вычертит новую кривую $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$. Аналитически, отображение сводится к $D\Delta\Delta$ уравнению типа Хироты



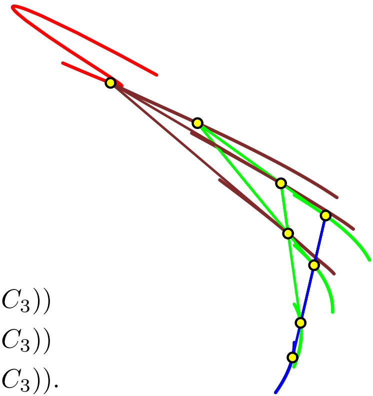
$$x_{ij} = \frac{x_i x_j}{x} + \frac{x_i' x_j - x_i x_j'}{x_j - x_i}.$$

Отображение F 3D-совместно:

$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned}$$

Непрерывный предел

Пусть даны кривые C и C_i, $i = 1, 2, \dots$ Пусть касательная к C в точке r пересекает C_i в точке r_i. Определим r_{ij} как пересечение касательных в r_i, r_j к соответствующим кривым. При движении r по C, точка r_{ij} вычертит новую кривую $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$. Аналитически, отображение сводится к $D\Delta\Delta$ уравнению типа Хироты



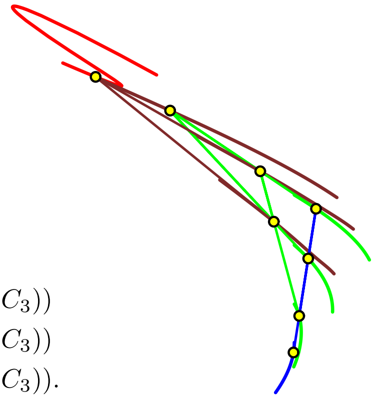
$$x_{ij} = \frac{x_i x_j}{x} + \frac{x'_i x_j - x_i x'_j}{x_j - x_i}.$$

Отображение F 3D-совместно:

$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned}$$

Непрерывный предел

Пусть даны кривые C и C_i, $i = 1, 2, \ldots$ Пусть касательная к C в точке r пересекает C_i в точке r_i. Определим r_{ij} как пересечение касательных в r_i, r_j к соответствующим кривым. При движении r по C, точка r_{ij} вычертит новую кривую $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$. Аналитически, отображение сводится к $D\Delta\Delta$ уравнению типа Хироты



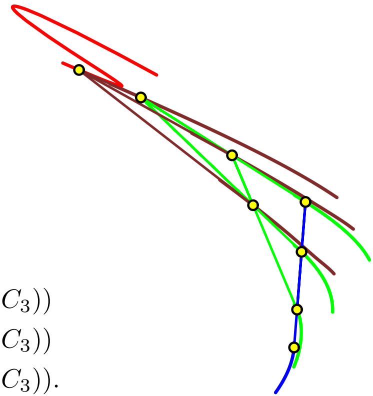
$$x_{ij} = \frac{x_i x_j}{x} + \frac{x_i' x_j - x_i x_j'}{x_j - x_i}.$$

Отображение F 3D-совместно:

$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned}$$

Непрерывный предел

Пусть даны кривые C и C_i, $i = 1, 2, \ldots$ Пусть касательная к C в точке r пересекает C_i в точке r_i. Определим r_{ij} как пересечение касательных в r_i, r_j к соответствующим кривым. При движении r по C, точка r_{ij} вычертит новую кривую $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$. Аналитически, отображение сводится к $D\Delta\Delta$ уравнению типа Хироты



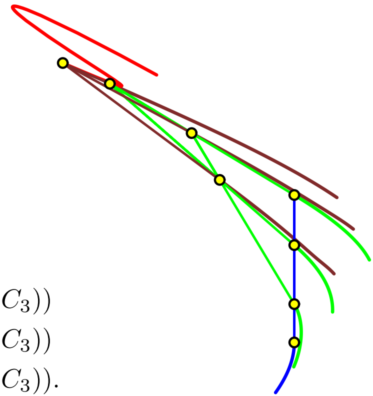
$$x_{ij} = \frac{x_i x_j}{x} + \frac{x_i' x_j - x_i x_j'}{x_j - x_i}.$$

Отображение F 3D-совместно:

$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned}$$

Непрерывный предел

Пусть даны кривые C и C_i, $i = 1, 2, \ldots$ Пусть касательная к C в точке r пересекает C_i в точке r_i. Определим r_{ij} как пересечение касательных в r_i, r_j к соответствующим кривым. При движении r по C, точка r_{ij} вычертит новую кривую $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$. Аналитически, отображение сводится к $D\Delta\Delta$ уравнению типа Хироты



$$x_{ij} = \frac{x_i x_j}{x} + \frac{x_i' x_j - x_i x_j'}{x_j - x_i}.$$

Отображение F 3D-совместно:

$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned}$$

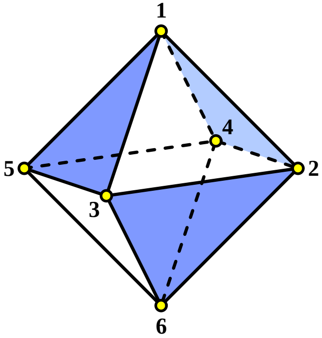
Одно уравнение из совместной пятёрки

Забудем про решётку, и занумеруем вершины октаэдра как на рисунке (правило игральной кости). **Внутреннее** свойство любого из наших уравнений

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0$$

заключается в том, что для него существует 8 эквивалентных **трёхногих форм** (a^{ijk} функция от x_i, x_j, x_k):

$$\begin{array}{ll}
(123) & a^{142} + a^{263} + a^{351} = 0 \\
(124) & a^{132} + a^{264} + a^{451} = 0 \\
(135) & a^{123} + a^{365} + a^{541} = 0 \\
(145) & a^{124} + a^{465} + a^{531} = 0 \\
(236) & a^{213} + a^{356} + a^{642} = 0 \\
(246) & a^{214} + a^{456} + a^{632} = 0 \\
(356) & a^{315} + a^{546} + a^{623} = 0 \\
(456) & a^{415} + a^{536} + a^{624} = 0
\end{array}$$



Пример: уравнение (χ_1) записывается как

$$x_1 x_6 + x_2 x_5 + x_3 x_4 = 0$$

Одна из трёхногих форм:

$$(123): \qquad \frac{x_4}{x_1 x_2} + \frac{x_6}{x_2 x_3} + \frac{x_5}{x_3 x_1} = 0,$$

остальные получаются применением группы симметрии октаэдра.

Оказывается, условие трёхногости достаточно жёсткое.

Теорема 3. Список трёхногих уравнений, с точностью до точечных замен $x_i \to X_i(x_i)$ и нумерации вершин:

$$x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4 = 0, \tag{Y_1}$$

$$(x_1 - x_2)x_4 + (x_2 - x_3)x_6 + (x_3 - x_1)x_5 = 0, \tag{Y_2}$$

$$\frac{(x_1 - x_4)(x_2 - x_6)(x_3 - x_5)}{(x_4 - x_2)(x_6 - x_3)(x_5 - x_1)} = -1, \tag{Y_3}$$

$$x_1x_6 = (x_2 + x_3)^{-\gamma}(x_4 + x_5), \tag{Y_4}$$

$$x_1x_6 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \tag{Y_5}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_5 + x_6, \tag{Y_6}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0. \tag{Y_7}$$

От одного уравнения к совместной пятёрке

Некоторые комбинации уравнений отсеиваются при стыковке трёхногих форм. В следующей таблице перечислены все типы ног, с точностью до точечных замен. Из неё видно, например, что уравнение типа (Y_1) может быть совместно только с уравнениями типов (Y_1) или (Y_6).

eq.	$a(x,y,z)$
(Y_1)	xyz
(Y_2)	$y(x+z),\ \log(x+y),\ \log\left(\dfrac{x+y}{y+z}\right)$
(Y_3)	$\log\left(\dfrac{x+y}{y+z}\right)$
(Y_4)	$y,\ xy,\ \log(x+y),\ y(x+z)^\gamma,\ y(x+z)^{1/\gamma}$
(Y_5)	$y,\ (x+y)z$
(Y_6)	$xyz,\ xy,\ y,\ y+\log(x+z),\ \log(x+y)$
(Y_7)	y

- Анализ трёхногих форм (5). Не очень длинный перебор вариантов доказывает, что уравнения типов (Y_4) при $\gamma \neq 1$, (Y_5) и (Y_6) вообще не могут быть ни с чем совместны. Не существует пятёрок, содержащих хотя бы одно уравнение такого типа.

  В остальных случаях, вид уравнения определяется с точностью до 10 произвольных функций $X_{ij} = X_{ij}(x_{ij})$. Например, пятёрка уравнений

$$\frac{(X_{ij} - X_{ik})(X_{kj} - X_{km})(X_{jm} - X_{im})}{(X_{ik} - X_{kj})(X_{km} - X_{jm})(X_{im} - X_{ij})} = -1, \quad i, j, k, m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

  допускает согласованные представления (5) для любых X_{ij}.

- Далее, эти уравнения подставляются во второй набор согласованных трёхногих форм (6). При этом уточняются функции X_{ij}. Оказывается, что они всегда связаны каким-то дробно-линейным преобразованием (в случае (χ_1), это просто растяжения). Этот произвол убивается неавтономными точечными заменами, и окончательно мы получаем следующий список совместных пятёрок.

Классификационная теорема

Любое 4D-совместное неприводимое нелинейное автономное уравнение типа Хироты эквивалентно, с точностью до автоморфизмов решётки и точечных замен $x(n) \to X(x(n), n)$, одному из уравнений (χ_1)–(χ_5). Точнее, все возможные совместные пятёрки сводятся к следующим:

5χ_1 $(1 \le i < j < k < l \le 5)$

$$x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{jk}x_{il} = 0;$$

4χ_3+χ_2 $(i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\})$:

$$(x_{ik} - x_{ij})x_{i5} + (x_{ij} - x_{jk})x_{j5} + (x_{jk} - x_{ik})x_{k5} = 0,$$
$$\frac{(x_{12} - x_{13})(x_{23} - x_{34})(x_{24} - x_{14})}{(x_{13} - x_{23})(x_{34} - x_{24})(x_{14} - x_{12})} = -1;$$

$4\chi_4+\chi_2$ $(i,j,k\in\{1,2,3,4\})$:

$$\frac{x_{ik}-x_{ij}}{x_{i5}}+\frac{x_{ij}-x_{jk}}{x_{j5}}+\frac{x_{jk}-x_{ik}}{x_{k5}}=0,$$
$$\frac{(x_{12}-x_{13})(x_{23}-x_{34})(x_{24}-x_{14})}{(x_{13}-x_{23})(x_{34}-x_{24})(x_{14}-x_{12})}=-1;$$

$5\chi_2$ $(i,j,k,m\in\{1,2,3,4,5\})$:

$$\frac{(x_{ij}-x_{ik})(x_{kj}-x_{km})(x_{jm}-x_{im})}{(x_{ik}-x_{kj})(x_{km}-x_{jm})(x_{im}-x_{ij})}=-1;$$

$3\chi_5+2\chi_3$ $(i,j=1,2,3)$:

$$\frac{x_{i4}-x_{j4}}{x_{45}}=x_{ij}\Big(\frac{1}{x_{j5}}-\frac{1}{x_{i5}}\Big),$$
$$\frac{x_{13}-x_{12}}{x_{15}}+\frac{x_{12}-x_{23}}{x_{25}}+\frac{x_{23}-x_{13}}{x_{35}}=0,$$
$$\frac{x_{14}-x_{24}}{x_{12}}+\frac{x_{24}-x_{34}}{x_{23}}+\frac{x_{34}-x_{14}}{x_{13}}=0.$$